279. Linear translatable operators ニ就テ

泉　信一（東北大）
北川敏男（阪大）

サキニ，著者ノ一人（北川）ハ，Linear translatable operators ノ形ヲ決定スルノ必要ヲ本誌デ述ベタノデ、コノ問題ニ就イテ吾々ノ得タ結果ヲ述ベヨウト思フ。

I. $f(x)$ ガ $(-\infty,\infty)$ デ定義サレテ居ルトスル。a ヲ任意ノ實数トシ $f(x)$ カラ、$f(x+a)$ ヲウル演算ヲ T_a デ表ス。乃チ $T_a f(x)=f(x+a)$.

次ニ，$f(x) \varepsilon L^2(-\infty,\infty)$ トスル。乃チ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx < +\infty$$

今、コノ $f(x)$ ヲ他ノ L^2-函数ニ変換スル演算 Λf ヲ考ヘル。Λf ハ次ノ三ツノ公理ヲ満足スルモノトスル。

公理 I.(1) Λf ハ分配ノ法則ヲ満足スル。乃チ $f_1(x) \varepsilon L^2$, $f_2(x) \varepsilon L^2$ 及ビ，C_1, C_2 ガ定数ナルトキ

$$\Lambda(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x))=C_1\Lambda f_1(x)+C_2\Lambda f_2(x)$$

公理 II. Λf ハ L^2-bounded デアル。乃チ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda f(x)|^2 dx \leqq G^2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx$$

ヲ充ス正数 G ガ存在スル。

---

(1) 以下、常数 C_1, C_2 ハ簡單ノタメ実数トスル。
複素数ノ場合ヘノ拡張ハ容易デアル。

公理III. Λf ハ translatable デアル。即チ任意ノ實數 a ニ對シテ

$$T_a\Lambda f(x)=\Lambda T_a f(x).$$

然ルトキ、次ノ定理ヲ得ル:

定理1. $f(x)$ ノ Fourier transform ヲ $\Gamma(\alpha)$ トスル，乃チ

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

然ルトキ

$$\Lambda f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

此處ニ，$\gamma(\alpha)$ ハ，$f(x)$ ニ無關係ナ，アル有界ナ函數デアル。

コノ定理ノ證明ハ、Bochner ノ手法[2] ヲ用ヰル。氏ハ，吾々ノ公理IIIノ代リニ

公理III* Λf ハ，differentiation ト permutable デアル。乃チ $f_1(x)\varepsilon L^2$，$f_2(x)\varepsilon L^2$ 及ビ $f_1'(x)=f(x)$ ナラバ

$$\Lambda f_1(x)=\frac{d}{dx}\Lambda f(x)$$

ヲ採ツテ、同樣ナ定理ヲ得テ居ル。

(2) S. Bochner, Math. Zeits. 29 (1928)

2. 定理1ヨリ次ノ結果ヲ得ル:

定理2.

$$\Lambda f(x)=\underset{T\to\infty}{l.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_T(x-t)f(t)\,dt$$ [3]

但シ此處ニ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_T(x)|^2dx \leqq 2G^2T$$

更ニ, M. Fréchet[4] ノ定理ヲ用ヰテ,

定理3.

$$\Lambda f(x)=\underset{T\to\infty}{l.m.}\int_{-T}^{T}\varphi_T(x-t)f(t)\,dt$$

コヽニ, $\varphi_T(t)\varepsilon L^2(-T,T)$

3. 本節ニ於イテハ、尚一般ナル Operator $\Lambda^* f\,(=\Lambda^* f(x))$ ヲ考ヘル。コレハ, $f(x)\varepsilon L^q(-\infty,\infty)\ (q>0)$ ヲバ, $L^p(-\infty,\infty)\ (p\geqq 1)$ ヘ変換スルモノトシ、公理I, III ニ加フルニ, 次ノ公理II*ヲ満足スルモノトスル。

公理II*. $\Lambda^* f$ ハ L^p-bounded デアル。即チ正数G

---

(3) $\underset{T\to\infty}{l.m.}\, f_T(t)=f(t)$ トハ

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_T(t)-f(t)|^2dt=0$$

ヲ意味スル。

(4) M. Fréchet, Comptes Rendus, t 144 (1907)

cf. Banach, Théorie des oprations linearies 1932.

ガアッテ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\overset{*}{\Lambda}f(x)\right|^{p}dx \leqq Q^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^{q}dx$$

然ルトキ，次ノ結果ヲ得ル。

定理4.

$$\overset{*}{\Lambda}f(x)=\underset{T\to\infty}{l.m.}^{p}\int_{-T}^{T}f(t)\,\varphi_{T}(x-t)\,dt$$ [5]

但シ，$\varphi_{T}(t)\in L^{p'}(-T,T)$

而シテ　$\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{p}=1$ [6]

コノ定理ノ証明ニハ，F. Riesz ノ定理[7]ヲツカフ。更ニ数列ノ変換ニ関シテモ同様ナ結果ヲ得ル。

---

(5) $\underset{T\to\infty}{l.m.}^{p}f_{T}(t)=f(t)$ ハ次ノコトヲ意味スル:

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{T}(t)-f(t)\right|^{p}dt=0$$

(6) $p=1$ ナラバ $p'=\infty$，$p'=\infty$ ナラバ，$L^{p'}$ ハ bounded functions ヲ意味スル。

(7) F. Riesz. Math. Ann. 69 (1910) (cf. Banach, loc. cit.)